Développement asymptotique de la série harmonique

Leçons : 230

Réf. : FGN, Oraux X-ENS Analyse 1 p 156

Exercice :

. Déterminer les 4 premiers termes du développement asymptotique de $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ $n \geq 1$

. On pose pour $n \geq 1$, $k_n = \min\{k \in \mathbb{N}^*, H_k \geq n\}$.

Montrer que $\frac{k_{n+1}}{k_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} e$

1) **Lemme** : Soit $\alpha > 1$. Mq $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{1}{\alpha - 1} \cdot \frac{1}{n^{\alpha-1}}$

$\alpha > 1$ donc $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$ est décroissante sur $]0, +\infty[$ et intégrable sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$.

Soit $k \geq 2$: $\int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x} dx$

donc pour $n \geq 1$, $\int_{n+1}^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_n^{+\infty} \frac{1}{x} dx$

$$\frac{1}{\alpha-1} \cdot \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \leq \frac{1}{\alpha-1} \cdot \frac{1}{n^{\alpha-1}}$$

donc $\boxed{\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{1}{\alpha-1} \cdot \frac{1}{n^{\alpha-1}}}$

2) Pour $n \geq 1$, on pose $u_n = H_n - \ln n$ et $v_n = u_n - \frac{1}{n}$.

Mq. $(u_n)_{n \geq 1}$ et $(v_n)_{n \geq 1}$ sont adjacentes et que leur limite $\gamma > 0$.

$\forall n \geq 1$, $u_n - v_n = \frac{1}{n} \geq 0$ donc $\boxed{v_n \leq u_n}$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln n = \frac{1}{n+1} + \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \quad (1)$$

$$= \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \quad (2)$$

$\forall x > -1, \quad \ln(1+x) \leq x$ donc $\quad (< \text{ si } x \neq 0)$

$$(1) \Rightarrow u_{n+1} - u_n \leq \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1} = 0$$

$u_{n+1} \leq u_n$ donc $\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est décroissante}}$

$$v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - u_n - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} \underset{(2)}{=} \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \geq 0$$

donc $v_{n+1} \geq v_n$ donc $\boxed{(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante}}$

Donc, $\boxed{(u_n) \text{ et } (v_n) \text{ sont adjacentes}}$

Leur limite γ est telle que : $\gamma \geq v_2 = 1 - \log 2$ $\quad \log(1+1)$

donc $\boxed{\gamma > 0}$

On a donc : $\boxed{H_n = \ln n + \gamma + o(1)}$

3) Déterminer le 3e terme

On pose pour $n \geq 1 \quad t_n = H_n - \ln n - \gamma = u_n - \gamma$.

Pour $n \geq 2$, $\quad t_n - t_{n-1} = \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)$ d'après (1)

donc $\boxed{t_n - t_{n-1} \sim -\frac{1}{2n^2}}$ $\quad n \to +\infty$

Donc, $\sum t_n - t_{n-1}$ converge et par théorème de sommation des équivalents,

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} (t_k - t_{k-1}) \sim -\frac{1}{2} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$$

lemme

donc $\quad -t_n \sim -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1} \times \frac{1}{n}$

d'où $\boxed{H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)}$

(A)

4) Déterminer le 4e terme

On pose pour $n \geq 1$ $w_n = H_n - \ln n - \gamma - \frac{1}{2n} = u_n - \gamma - \frac{1}{2n}$

Pour $n \geq 2$, $w_n - w_{n-1} = \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} \times \frac{1}{1 - 1/n}$

$$= \cancel{\frac{1}{n}} - \cancel{\frac{1}{n}} - \cancel{\frac{1}{2n^2}} - \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) - \cancel{\frac{1}{2n}} + \frac{1}{2n}\left(\cancel{1} + \cancel{\frac{1}{n}} + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)$$

$$= -\frac{1}{3n^3} + \frac{1}{2n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

donc $\boxed{w_n - w_{n-1} \sim \frac{1}{6n^3}}$

donc $-w_n \sim \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{n^2}$

d'où $\boxed{H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)}$

Rq : Le terme suivant est $\frac{1}{120n^4}$

5) Mq $\frac{k_{n+1}}{k_n} \to e$

On écrit pour $k \geq 1$: $H_k = \ln k + \gamma + \varepsilon_k$ où $\varepsilon_k \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$

On a donc $H_{k_n} = \ln k_n + \gamma + \varepsilon_{k_n} \geq n$

et $H_{k_n - 1} = \ln(k_n - 1) + \gamma + \varepsilon_{k_n - 1} < n$

En passant à l'exponentielle

$k_n e^{\gamma} e^{\varepsilon_{k_n}} \geq e^n$ et $(k_n - 1) e^{\gamma} e^{\varepsilon_{k_n - 1}} < e^n$

d'où $e^n e^{-\gamma} e^{-\varepsilon_{k_n}} \leq k_n < e^n e^{-\gamma} e^{-\varepsilon_{k_n - 1}} + 1$

donc $\boxed{k_n \sim e^n e^{-\gamma}}$ et $\boxed{\frac{k_{n+1}}{k_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} e}$